МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

Т.В. КРЮКОВА

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методическое пособие для студентов направления

«Экономика» всех форм обучения

Рубцовск 2012

УДК 517.9

Крюкова Т.В. Дополнительные главы линейной алгебры: Методическое пособие для студентов направления «Экономика» всех форм обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2012.- 46 с.

Методическое пособие содержит теоретический материал по линейной алгебре и варианты заданий для самостоятельной работы. Пособие рекомендуется для студентов, обучающихся по экономическим специальностям. Пособие содержит большое число разнообразных примеров и задач с решением. Каждое понятие, метод, теорема поясняются примерами. Пособие содержит весь материал, предусмотренный программой.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ВМФиХ Рубцовского индустриального института
Протокол № 3 от 29.11.2012г.

Рецензент: к.т.н., доцент Э.С. Маршалов

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Основные сведения о матрицах

Понятие матрицы и основанный на нем раздел математики – *матричная алгебра* – имеют чрезвычайно важное значение для экономистов. Объясняется это тем, что значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой, а главное – компактной матричной форме.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, *A, B, C, ...,* а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где *I* – номер строки, *j* – номер столбца.

Например, матрица

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

или, в сокращенной записи, $A = a_{ij}$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Например,

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы *A* и *B* одного размера называются *равными*, если они совпадают элементарно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых i=*1, 2, ..., m*; *j*=1, 2, …, *n*.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости.

Таблица 1.1

Распределение ресурсов по отдельным отраслям экономики (усл. ед.)

Ресурсы	Отрасль экономики	
	промышленность	сельское хозяйство
Электроэнергия	5,3	4,1
Трудовые ресурсы	2,8	2,1
Водные ресурсы	4,8	5,1

Таблица может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям:

$$\underset{3\times2}{A}=\begin{pmatrix} 5,3 & 4.1 \\ 2,8 & 2.1 \\ 4,8 & 5,1 \end{pmatrix}.$$

В этой записи, например, матричный элемент $a_{11}=5,3$ показывает, сколько электроэнергии потребляет промышленность, а элемент $a_{22}=2,1$ - сколько трудовых ресурсов потребляет сельское хозяйство.

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей* (*вектором*) – *строкой*, а из одного столбца - *матрицей* (*вектором*) – *столбцом*:
$A=\ a_{11}a_{12},\ ...,\ a_{1n}$ - матрица-строка;

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$ - матрица-столбец.

Матрица называется *квадратной* n-го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

Например, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки (i=j), называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11},\ a_{22},\ ...,\ a_{nn}$.

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Например,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной* матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все ее элементы равны нулю:

$$\underset{m\times n}{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые специфические.

Умножение матриц на число. Произведением матрицы *A* на число μ называется матрица μA=$A\mu$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \mu\ A = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu\, a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{pmatrix}.$$

Точно так же умножаются на число все остальные матрицы.

Сложение матриц. Если даны две квадратные матрицы одного порядка, например, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то их суммой называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется сумма прямоугольных матриц, имеющих одинаковое число строк и столбцов. Легко проверить, что сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному закону: *A*+*B*=*B*+*A*, *A*+(*B*+*C*)=(*A*+*B*)+*C*.

Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1)\cdot B$.

Пример 1. В некоторой отрасли четыре завода выпускают три вида продукции. Матрица *A* задает объем продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица *B* – во втором; a_{ij}, b_{ij} - объем продукции *j*-того типа на *I* – том заводе в первом во втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) объемы продукции; б) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам.

Решение.

а) Объемы продукции за полугодие определяются суммой матриц *A* и *B*, т.е.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

где $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ - объем продукции *j*-того типа, произведенной за полугодие *i*-м заводом.

б) Прирост во втором квартале по сравнению с первым определяется разностью матриц

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные элементы d_{ij} матрицы *D* показывают, что на данном заводе *i* объем производства *j*-го продукта уменьшился; положительные d_{ij} - увеличился; нулевые d_{ij} - не изменился.

Произведение матриц. Рассмотрим умножение матриц на примере двух квадратных матриц *A* и *B*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

По определению произведением матрицы *A* на матрицу *B* называется матрица *C*=*AB*, элементы которой составлены следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, элемент матрицы–произведения, находящейся на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов *i*-й строки первой матрицы на соответствующий элемент *j*-го столбца второй матрицы. Эти правила сохраняются и для перемножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы множителя.

Пример 2. Предприятие производит три типа продукции, используя четыре вида ресурсов. Нормы затрат ресурса *i*-го вида на производство единицы продукции *j*-го типа заданы матрицей затрат $A_{4\times3}$. За определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij}, записанное матрицей $X_{3\times1}$. Стоимость единицы каждого вида ресурсов задана матрицей $P_{1\times4}$. Определить *S*- матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени, а также найти полную стоимость всех затраченных ресурсов, если

$$A_{4\times3}=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix},\quad X_{3\times1}=\begin{pmatrix}100\\80\\110\end{pmatrix},\qquad P_{1\times4}=\begin{matrix}10&20&10&10\end{matrix}.$$

Решение. Матрица полных затрат ресурсов S определяется как произведение матриц A и X, т.е. $S = AX$.

$$S=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100\\80\\110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot100+5\cdot80+3\cdot110\\0\cdot100+1\cdot80+8\cdot110\\1\cdot100+3\cdot80+1\cdot110\\2\cdot100+2\cdot80+3\cdot110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200+400+330\\0+\ 80+880\\100+240+110\\200+160+330\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}930\\960\\450\\690\end{pmatrix},$$

т.е. за данный период времени израсходовано 930 ед. ресурса первого вида, 960 ед. ресурса второго вида, 450 ед. ресурса третьего вида и 690 ед. ресурса четвертого вида.

Стоимость всех затраченный ресурсов C определяется как произведение матриц P и S, т.е. $C=PS$.

В данном случае

$$C=\begin{matrix}10&20&10&10\end{matrix}\cdot\begin{pmatrix}930\\960\\450\\690\end{pmatrix}=10\cdot930+20\cdot960+10\cdot450+10\cdot690\ =$$

$$=\ 9300+19200+45000+6900\ =39900 \text{ ден.ед.}$$

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

1) $A+B=B+A$.
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$.
3) $\lambda(A+D)=\lambda A+\lambda B$.
4) $A(B+C)=AB+AC$.
5) $(A+B)C=AC+BC$.
6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.
7) $A(BC)=(AB)C$.

Однако имеются и специфические свойства матриц. Так, операция умножения матриц имеет некоторые отличия от умножения чисел:

а) если произведение матриц AB существует, то после перестановки сомножителей местами произведения матриц BA может и не существовать.

б) Если даже произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

Пример 3. Найти произведения матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&3\\1&5\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Решение. $A_{2\times3}\cdot B_{3\times2}=C_{2\times2}=\begin{pmatrix}0 & 12\\ 1 & 17\end{pmatrix}$;

$B_{3\times2}\cdot A_{2\times3}=D_{3\times3}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 16 & 11\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, т.е. $AB\neq BA$.

в) В случае, когда оба произведения AB и BA существуют и оба – матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц A и B одного порядка), *коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется,* т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется *транспонированной* относительно матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m\times n$, то транспонированная матрица A' имеет размер $n\times m$.

Например, $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; $A'_{3\times2}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например A^T.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A')'=A$.
2) $(\lambda A)'=\lambda A'$.
3) $(A+B)'=A'+B'$.
4) $(AB)'=B'A'$.

1.3. Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу A, - тесно связано с решением систем линейных уравнений. Определитель матрицы A обозначается $|A|$ или Δ.

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или *определителем первого порядка,* называется элемент a_{11}:

$\Delta_1=|A|=a_{11}$. Например, пусть $A=(3)$, тогда $\Delta_1=|A|=3$.

Определителем матрицы второго порядка $A = a_{ij}$, или *определителем второго порядка,* называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.3)$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя* второго порядка. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = a_{ij}$, или *определителем третьего порядка,* называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\Delta_3 = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \qquad (1.4)$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу (1.4), легко запомнить, пользуясь схемой (рис. 1.1), которая называется правилом треугольников или правилом Саррусa.

«+» «-»

Рис 1.1

Пример 4. Найти определитель матрицы $B = A \cdot A^T$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$$B = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 2 & 3\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 1 & 3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 4 \\ 1\cdot 3+3\cdot 2+1\cdot 2 & 1\cdot 1+3\cdot 3+1\cdot 1 & 1\cdot 5+3\cdot 3+1\cdot 4 \\ 5\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 2 & 5\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 1 & 5\cdot 5+3\cdot 3+4\cdot 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 9+4+4 & 3+6+2 & 15+6+8 \\ 3+6+2 & 1+9+1 & 5+9+4 \\ 15+6+8 & 5+9+4 & 25+9+16 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 17 & 11 & 29 \\ 11 & 11 & 18 \\ 29 & 18 & 50 \end{pmatrix}.$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 17 & 11 & 29 \\ 11 & 11 & 18 \\ 29 & 18 & 50 \end{vmatrix}=17\cdot 11\cdot 50+11\cdot 18\cdot 29+11\cdot 18\cdot 29-$$

$$-\ 29\cdot 11\cdot 29+11\cdot 11\cdot 50+18\cdot 18\cdot 17\ =$$

$$=9350+5742+5742-\ 9251+6050+5508\ =25.$$

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} матрицы n-го порядка называется определитель матрицы (n-1) – го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1) – го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} *элемента* a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $-1^{\ i+j}$:

$$A_{ij}=\ -1^{\ i+j}\,M_{ij} \tag{1.5}$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца (i+j) – четное число, и отличается от минора знаком, когда (i+j) – нечетное число.

Например, $A_{23}=\ -1^{\ 2+3}M_{23}=-M_{23}$; $A_{31}=\ -1^{\ 3+1}M_{31}=M_{31}$.

Пример 5. Найти алгебраические дополнения элементов a_{11}, a_{23} матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $A_{11} = -1^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{23} = -1^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$.

1.4. Свойства определителей

Свойство 1. Величина определителя не меняется, если в определителе все строки заменить соответствующими столбцами (1-ю строку на 1-й столбец и т.д.). Доказательство всех свойств будем приводить для определителей 3-го порядка.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Свойство 2. При перестановке двух строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\Delta.$$

Для доказательства этого свойства достаточно применить правило треугольников к левой и правой частям этого равенства.

Свойство 3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю. Пусть в определителе первая и вторая строки равны. Воспользуемся вторым свойством. При перестановке двух строк знак определителя поменяется на противоположный.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\Delta.$$

$\Delta = -\Delta \Rightarrow \Delta + \Delta = 0,\ 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0.$

Свойство 4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то определитель равен 0. Это свойство следует из свойств 3 и 4. В самом деле: $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{a_{23}}{a_{13}} = k$, тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 0.$$

Свойство 6. Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, где в 1-м определителе этой строки (столбца) только первые слагаемые, остальные все без изменений, а во втором определителе в той же строке (столбце) только вторые слагаемые, все остальные без изменений.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7. Если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + k0 = \Delta.$$

Это свойство является следствием 3, 4 и 6 свойств.

Свойство 8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Докажем 8-е свойство:

с одной стороны:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32};$$

с другой стороны:

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-$$

$$-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}) = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Следовательно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}.$$

Дополнения к 8-му свойству.

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна 0.

Например, для строк $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0,$ для столбцов $a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0.$

Проверим: $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=a_{11}(-M_{21})+a_{12}(M_{22})+a_{13}(-M_{23})=$

$$=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{12}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-$$

$$-a_{13}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})=0.$$

Таким образом проверяются и другие равенства.

1.5. Обратная матрица

Определение: если A – квадратная матрица, то обратной для нее называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию $A\cdot A^{-1}=E$ или $A^{-1}\cdot A=E$.

Теорема. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Покажем, что в этом случае $|A|\neq 0$.

От противного. Пусть $|A|=0$, тогда по определению произведения $|A\cdot A^{-1}|=|A||A|^{-1}=0$. А это невозможно в силу определения обратной матрицы: $|A\cdot A^{-1}|=|E|=1$. Следовательно, $|A|\neq 0$.

Достаточность. Для простоты приведем доказательство для случая матрицы третьего порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - невырожденная матрица, т.е. $|A| \neq 0$.

Покажем, что в этом случае для нее существует обратная матрица.

Пусть A_{ik} - алгебраическое дополнение элемента a_{ik}. Матрица A^{-1}, обратная к *A*, получается следующим образом:

1. Составим матрицу *B*, заменяя в матрице *A* каждый ее элемент a_{ik} его алгебраическим дополнением A_{ik}, деленным на $|A|$.

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{13}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{23}/|A| \\ A_{31}/|A| & A_{32}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

2. Составим новую матрицу *B**, поменяв в *B* местами строки со столбцами (матрица *B** называется транспонированной по отношению к матрице *B*). Имеем:

$$B^* = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем произведение $A \cdot B^*$:

$$A \cdot B^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}}{|A|} \\ \dfrac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}{|A|} \\ \dfrac{a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

По свойству 8 определителей получаем: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, т.е. *AB*=E*, откуда *B*=A*$^{-1}$, следовательно, если $|A| \neq 0$, обратная матрица существует.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Найти A^{-1} к матрице *A*. Вычислим определитель матрицы и найдем алгебраические дополнения ко всем элементам:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ |A|=-9.$$

$$A_{11}=3,\ A_{21}=-4,\ A_{31}=2,$$
$$A_{12}=-6,\ A_{22}=2,\ A_{32}=-1,\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 4/9 & -2/9\\ 2/3 & -2/9 & 1/9\\ -1/3 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}.$$
$$A_{13}=3,\ A_{23}=-1,\ A_{33}=-4,$$

Проверка: по определению обратной матрицы $A\cdot A^{-1}=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3 & 4/9 & -2/9\\ 2/3 & -2/9 & 1/9\\ -1/3 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1/3+4/3+0 & 4/9-4/9+0 & -2/9+2/9+0\\ -1+4/3-1/3 & 4/3-4/9+1/9 & -2/3+2/9+4/9\\ 0+2/3-2/3 & 0-2/9+2/9 & 0+1/9+8/9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.6. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу $m\times n$ (*m* строк, *n* столбцов):

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \dots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n}\\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{in}\\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Выделим в этой матрице произвольные *k* - строк и *k* - столбцов. Элементы, находящиеся на пересечении этих выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка *k*.

Минором *k* – порядка матрицы *A* называется определитель квадратной матрицы, получающийся из данной матрицы выделением произвольных *k* - строк и *k* – столбцов. Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$, размером 3х4 одним из миноров 3-го порядка является определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. Минором второго порядка - $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. Сами элементы матрицы являются минорами первого порядка.

О п р е д е л е н и е . Рангом матрицы *А* называется наибольший из порядков, отличных от нуля, ее миноров. Если ранг матрицы *А* равен *r*, то это означает, что в матрице *А* существует хотя бы один, отличный от нуля, минор порядка r, а всякий минор порядка, большего, чем r, равен нулю. Ранг матрицы будем обозначать так: $r(A)$.

Пример 7. Найти ранг матрицы *А*:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единственный определитель четвертого порядка равен нулю (т.к. строка нулевая).

Составим минор третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,\ r(A) = 3.$

Метод вычисления определителей, составленных из элементов матрицы для нахождения нулевого минора, называется методом окаймления минора.

При определении ранга матрицы приходится выделять очень много определителей. Чтобы облегчить этот процесс, над матрицей выполняются элементарные преобразования:

1. Умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) на одно и то же число, не равное нулю.

2. Прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

3. Перемена местами строк (столбцов) матрицы.

4. Отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются эквивалентными. Ранги эквивалентных матриц равны. Этим можно пользоваться при вычислении ранга матрицы.

Пример 8.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{\text{столбцы}} \xrightarrow{1+5} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \\ 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{\text{столбцы}} \xrightarrow{2+4} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ 6 & -6 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{\text{столбцы}} \xrightarrow{\substack{1+3 \\ 2+3}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \\ 9 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{\text{столбцы}} \xrightarrow{1:3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{\text{столбцы}} \xrightarrow{1+2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{\text{столбцы}} \xrightarrow{2\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}^{\text{строки}} \xrightarrow{3-2\cdot 3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{\text{строки}} \xrightarrow{1\cdot 2+3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3,\ r(A)=2.$$

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов.

В матрице *A* обозначим ее строки следующим образом:

$e_1 = \ a_{11}a_{12}...a_{1n} \ , \quad e_2 = \ a_{21}a_{22}...a_{2n} \ ,..., \qquad e_m = \ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \ .$

Две строки матрицы называются *равными*, если равны их соответствующие элементы: $e_k = e_s$, если $a_{kj} = a_{sj}$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ n$.

Арифметические операции над строками матрицы (умножение строки на число, сложение строк) вводятся как операции, проводимые поэлементно:

$$\lambda e_k = \ \lambda a_{k1}\lambda a_{k2}...\lambda a_{kn} \ ;$$

$$e_k + e_s = \left[\ a_{k1}+a_{s1} \quad a_{k2}+a_{s2} \ \ ... \ \ a_{kn}+a_{sn} \ \right].$$

Строка *е* называется *линейной комбинацией* строк $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_s$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа:

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_s e_s, \tag{1.6}$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_s$ - любые числа.

Строки матрицы $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_m$ называются *линейно независимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m = 0, \tag{1.7}$$

где 0=(0 0…0).

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Действительно, пусть для определенности в формуле (1.7) $\lambda_m \neq 0$, тогда

$$e_m = (-\lambda_1/\lambda_m)e_1 + (-\lambda_2/\lambda_m)e_2 + ... + (-\lambda_{m-1}/\lambda_m)e_{m-1}, \text{ или}$$

$$e_m = \tilde{\lambda}_1 e_1 + \tilde{\lambda}_2 e_2 + ... + \tilde{\lambda}_{m-1} e_{m-1}, \qquad (1.8)$$

где $\tilde{\lambda}_i = (-\lambda_i/\lambda_m)$; $i = 1,\ 2,\ ...,\ m-1$.

Таким образом, строка e_m является линейной комбинацией остальных строк.

Если линейная комбинация строк (1.7) равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, то строки $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_m$ называются *линейно независимыми.*

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).*

Пусть матрица *A* размера $m \times n$ имеет ранг ($r \leq \min(m;\ n)$). Это означает, что существует отличный от нуля минор *r*-го порядка. Всякий нулевой минор *r*-го порядка будем называть *базисным минором*. Пусть для определенности это минор

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ \multicolumn{4}{c}{......................} \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда строки матрицы $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_r$ линейно независимы. Действительно, предположим противное, т.е. одна из этих строк, например e_r, является линейной комбинацией остальных:

$$e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_{r-1} e_{r-1}.$$

Вычтем из элементов *r*-й строки элементы 1-й строки, умноженные на λ_1, элементы 2-й строк, умноженные на λ_2, и т.д., наконец, элементы $(r-1)$-й строки, умноженные на λ_{r-1}. На основании свойства 7 (см. п. 1.4) при таких преобразованиях матрицы ее определитель Δ не изменится, но так как теперь *r*-я строка будет состоять из одних нулей, то $\Delta = 0$ - противоречие, и наше предположение о том, что строки $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_r$, матрицы линейно зависимы, неверно.

Строки $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_r$ назовем *базисным.*

Покажем, что любые $(r+1)$ строк матрицы линейно зависимы, т.е. любая строка выражается через базисные.

Рассмотрим минор $(r+1)$-го порядка, который получается при дополнении рассматриваемого минора элементами еще одной строки *i* и столбца *j*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

Этот минор равен нулю, так как ранг матрицы равен *r*, поэтому любой минор более высокого порядка равен нулю.

Раскладывая его по элементам последнего (добавленного) столбца, получаем $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0$, где последнее алгебраического дополнение A_{ij} совпадает с базисным минором Δ и поэтому отлично от нуля, т.е. $A_{ij} \neq 0$.

Разделив последнее равенство на A_{ij}, можем выразить элемент a_{ij} как линейную комбинацию:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s a_{sj}, \qquad (1.9)$$

где $\lambda_s = a_{sj} / A_{ij}$.

Фиксируем значение $i(i>r)$ и получаем, что для любого j (j=1, 2, …, n) элементы i-й строки e_i линейно выражаются через элементы строк $e_1, e_2, \dots, e_r$, т.е. i-я строка есть линейная комбинация базисных: $e_i = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s e_{sj}$.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия и определения

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где a_{ij}, b_i $i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$ - произвольные числа, называемые соответственно *коэффициентами при переменных* и *свободными членами* уравнений.

* В линейной алгебре обычно обозначают переменные одной буквой с соответствующими индексами, т.е. $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots$, вместо принятых в школе обозначений $x,\ y,\ z$, …, которые в данном случает не очень удобны.

В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, ..., m \ . \tag{2.2}$$

Решением системы (2.1) называется такая совокупность n чисел $x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ ...,\ x_n = k_n$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Например, система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ - совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10; 0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ - несовместная; а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ - совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений ($x_1 = c$, $x_2 = 10 - 2c$, где c – любое число. Две системы уравнений называются *равносильными*, или *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений. С помощью элементарных преобразований системы уравнений, рассмотренных в п. 1 применительно к матрицам (например, умножение обеих частей уравнений на числа, не равные нулю; сложение уравнений системы), получается система (2.1), равносильная данной.

Запишем систему (2.1) в матричной форме. Обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix},$$

где *A – матрица коэффициентов при переменных,* или *матрица системы, X - матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.*

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, то их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

есть матрица-столбец. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2.1). На основании определения равенства матриц систему (2.1) можно записать в виде:

$$AX = B. \qquad (2.3)$$

2.2. Система *n* линейных уравнений с *n* переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Пусть число уравнений системы (2.1) равно числу переменных, т.е. $m=n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется *определителем системы.*

Рассмотрим решение **системы двух уравнений** с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_{2,} \end{cases} \qquad (2.4)$$

в которой хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля.

Для решения этой системы исключим переменную x_2, умножив первое уравнение на a_{22}, второе – на $-a_{12}$ и сложив их. Затем исключим переменную x_1, умножив первое уравнение на $-a_{21}$, второе – на a_{11} и также сложив их. В результате получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_2. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Выражение в скобках есть определитель системы

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначив

$$\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

система (2.5) примет вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1; \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Из полученной системы следует, что если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система (2.4) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ (или $\Delta_2 \neq 0$), то система (2.4) несовместная, так как в этом случае приводится к виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_1; \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_2. \end{cases}$

Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то система (2.4) неопределенная и имеет бесконечное множество решений, так как в этом случае приводится к виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0; \\ 0 \cdot x_2 = 0. \end{cases}$

Для получения решения системы (2.1) при $m=n$ **в общем виде** предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая *слева* обе части матричного равенства (2.3) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}\ AX\ = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}\ AX\ =\ A^{-1}A\ X = EX = X$, то решение системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \qquad (2.7)$$

Пример 9. Решить систему уравнений третьего порядка матричным методом.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель матрицы системы $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, значит, к системе применим матричный метод.

Транспортируем матрицу A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для элементов матрицы A^T находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Запишем решение системы в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 3$. Проверку сделать самостоятельно.

Ответ: (2; -5; 3).

Теорема Крамера. *Пусть* Δ *- определитель матрицы системы A, а* Δ_j *- определитель матрицы, получаемый из матрицы A заменой j-го столбца свободных членов. Тогда, если* $\Delta \neq 0$, *то система имеет единственное решение, определяемое по формулам:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad j = 1, 2, ..., n \ . \qquad (2.8)$$

Формулы (2.8) получили название *формул Крамера*.

В соответствии с п. 1.5 обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ - матрица, присоединенная к матрице *A*. Так как элементы матрицы $\tilde{A}$ есть алгебраические дополнения элементов матрицы A', транспонированной к *A*, то запишем равенство (2.7) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|A| = \Delta$, получим после умножения матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + ... + b_nA_{n2} \\ .... \\ b_1A_{1n} + b_2A_{21} + ... + b_nA_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},$$ откуда следует, что для любого $j(j=1,2,...,n)$

$x_j = \frac{1}{\Delta}\ b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}$, где Δ_j - определитель матрицы, полученный из матрицы *A* заменой *j*-го столбца $j(j=1,2,...,n)$ столбцом свободных членов. Следовательно, $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$.

Заметим, что фактически формулы Крамера были получены в частном случае при решении системы (2.4) *n*=2 уравнений с двумя переменными.

Пример 10. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ \qquad x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель основной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель, предварительно обратив в нуль все, кроме одного, элементы какой-либо строки (столбца). Выберем первый столбец (один нуль в нем уже есть). «Сделаем» в нем еще два нуля. Для этого вторую строку прибавим к первой и четвертой строкам.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Теперь разлагаем полученный определитель по первому столбцу:

$$\Delta = -1\cdot (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка столбец умножим на -2 и прибавим к третьему столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot (1-2) = -4.$$

Составим определитель Δ_i, получаемый их определителя Δ заменой i-го столбца из свободных членов $(i=\overline{1,4})$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Выберем третий столбец. «Сделаем» в нем три нуля. Чтобы «сделать» нуль на месте элемента 3, прибавим к первой строке вторую. Чтобы «сделать» нуль на месте элемента -3, прибавим ко второй строке четвертую строку, умноженную на три. Чтобы «сделать» нуль на месте элемента -1, прибавим четвертую строку к третьей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 40 & 4 & 0 & 8 \\ 40 & 5 & 0 & 7 \\ 13 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разлагаем полученный определитель по третьему столбцу:

$$\Delta_1 = 1\cdot(-1)^{4+3}\cdot\begin{vmatrix}40 & 4 & 8\\ 40 & 5 & 7\\ 13 & 2 & 2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}40 & 4 & 8\\ 40 & 5 & 7\\ 13 & 2 & 2\end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix}10 & 1 & 2\\ 40 & 5 & 7\\ 13 & 2 & 2\end{vmatrix}.$$

Первую строку умножим на -5 и прибавим ко второй строке; также первую строку умножим на -2 и прибавим к третьей:

$$\Delta_1 = -4\begin{vmatrix}10 & 1 & 2\\ -10 & 0 & -3\\ -7 & 0 & -2\end{vmatrix} = -4\cdot 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-10 & -3\\ -7 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot\begin{vmatrix}-10 & -3\\ -7 & -2\end{vmatrix} = 4\cdot(20-21) = -4.$$

Аналогично:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & 30 & 3 & 4\\ -1 & 10 & -3 & 4\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 10 & 1 & 1\end{vmatrix} = -8,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}1 & 2 & 30 & 4\\ -1 & 2 & 10 & 4\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 10 & 1\end{vmatrix} = -12,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 30\\ -1 & 2 & -3 & 10\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 10\end{vmatrix} = 16.$$

Отсюда получим решение системы уравнений.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-16}{-4} = 4$$

Ответ: (1; 2; 3; 4).

Существенным недостатком решения систем n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера и методом обратной матрицы является их большая трудоемкость, связанная с вычислением определителей и нахождением обратной матрицы. Поэтому эти методы представляют скорее теоретический интерес и на практике не могут быть использованы для решения реальных экономических задач, сводящихся часто к системам с большим числом уравнений и переменных.

2.3. Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы (2.1) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (2.1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, ..., -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, …, m-му уравнению системы (2.1), исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ .... \\ \qquad a_{i2}^{(1)}x_2 + ... + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ .... \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + ... + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \tag{2.9}$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа $-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $-a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $-a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, …, m-му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных x_3, x_4, ..., x_{r-1}, после $r-1$ -го шага получим систему

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = & b_1, \\
\quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = & b_2^{(1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = & b_r^{(r-1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
0 = & b_{r+1}^{(r-1)}, \\
\ldots\ldots\ldots & \\
0 = & b_m^{(r-1)}.
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

Число нуль в последних m-r уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$. *Если хотя бы одно из чисел* $b_{r+1}^{(r-1)},\ldots,b_m^{(r-1)}$ *не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система* (2.1) *несовместна.*

Таким образом, для любой *совместной системы числа* $b_{r+1}^{(r-1)},\ldots,b_m^{(r-1)}$ *в системе* (2.10) *равны нулю.* В этом случае последние m-r уравнений в системе (2.10) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2.1). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (2.10) равно числу переменных, т.е. $r=n$ (в этом случае система (2.10) имеет треугольный вид; б) $r<n$ (в этом случае система (2.10) имеет ступенчатый вид).

Переход системы (2.1) к равносильной ей системе (2.10) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (2.10) – *обратным ходом*.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$
\bar{A} = \left(\begin{array}{l|l}
a_{11}\ \ a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\
a_{21}\ \ a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
a_{m1}\ \ a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m
\end{array}\right),
\tag{2.11}
$$

называемую *расширенной матрицей системы* (2.1), ибо в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример 11. С двух заводов поставляются автомобили для двух автохозяйств, потребности которых соответственно 200 и 300 машин. Первый завод выпустил 350 машин, а второй 150. Известны затраты на перевозку машин с завода в каждое хозяйство (см. таблицу 1).

Таблица 1

Завод	Затраты на перевозку автохозяйства, ден.ед.	
	1	2
1	15	20
2	8	25

Минимальные затраты на перевозку равны 7950 ден. ед. Найти оптимальный план перевозок машин.

Решение. Пусть x_{ij} - количество машин, поставляемых с i-го завода j-му хозяйству (i, j=1,2). Получаем систему

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 350, \\ x_{21} + x_{22} = 150, \\ x_{11} \quad x_{21} = 200, \\ x_{12} + x_{22} = 300, \\ 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{21} + 25x_{22} = 7950. \end{cases}$$

Решим данную систему, например, методом Гаусса.

Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 15 & 20 & 8 & 25 & 7950 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - I \\ \\ V - 15 \cdot I \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 5 & 8 & 25 & 2700 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 5 & 8 & 25 & 2700 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + II \\ \\ V - 5II. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 8 & 20 & 1200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 8 & 20 & 1200 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV - 8 \cdot III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг системы $r = 4$, т.е. r=n, и система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 350, \\ x_{12} + x_{22} = 300, \\ x_{21} + x_{22} = 150, \\ 12x_{22} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_{11}=50$, $x_{12}=300$, $x_{21}=150$, $x_{22}=0$.

Пример 12. Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & - & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству 0=-1, следовательно, данная система несовместна.

2.4. Система *m* линейных уравнений с *n* переменными

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк. Поэтому, если строки расширенной матрицы A_1, т.е. уравнение системы (2.1), линейно независимы, то ранг матрицы A_1 равен числу ее уравнений, т.е. $r=m$, если линейно зависимые, то $r<m$.

Вопрос о разрешимости системы (2.1) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

Теорема Кронекера-Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.*

Не проводя строгого доказательства теоремы, поясним его. В процессе преобразования системы уравнений (2.1) к виду (2.10), т.е. элементарных преобразований матрицы системы A и расширенной матрицы $\overline{A}$, ранги этих матриц не изменяются. Ранее (см. п. 2.3) было установлено, что система (2.10) совместна тогда и только тогда, когда все свободные члены $b_{r+1}^{(r-1)},...,b_m^{(r-1)}$ равны нулю. В этом случае, как нетрудно проверить, ранг матрицы и ранг расширенной матрицы системы (2.10), так же как и данной системы (2.1), совпадают (оба равны r).

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1. *Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е.* $r=n$*, то система* (2.1) *имеет единственное решение.*
2. *Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т.е.* $r<n$*, то система* (2.1) *неопределенная и имеет бесконечное множество решение.*

Результаты исследований системы (2.1) приведем в виде схемы (рис. 2.1):

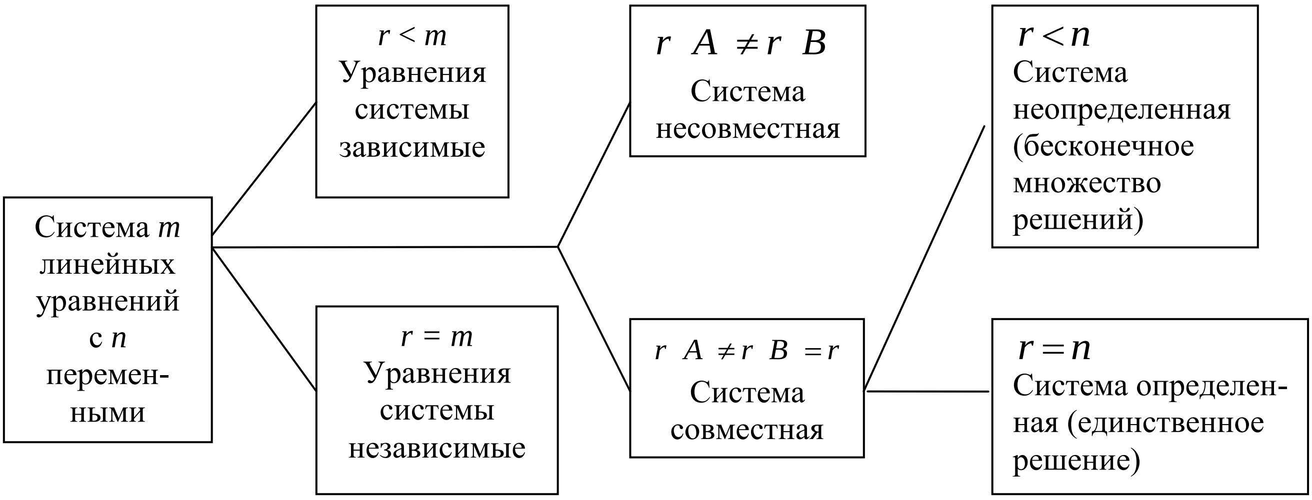

Рис. 2.1

Если $r < n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_r$ называются *основными* (или *базисными*), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ называются *неосновными* (или *свободными*).

Решение системы (2.1), в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется *базисным*.

Приведенная на рисунке 1 схема не означает, что для решения системы (2.1) в общем случае необходимо вычислять отдельно, а затем сравнивать ранги матрицы системы A и расширенной матрицы $\bar{A}$. Достаточно сразу применить метод Гаусса.

Достоинства метода Гаусса по сравнению с другими:

- значительно менее трудоемкий;
- позволяет однозначно установить, совместна система или нет, а в случае совместности найти её решения (единственное или бесконечное множество);
- дает возможность найти максимальное число линейно независимых уравнений – ранг матрицы системы.

Пример 13. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен 1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right)$, т.е. ранг матрицы системы $r = 2$.

Оставляем в левой части переменные $x_1,\ x_2$, которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т.е. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$). Остальные неосновные переменные $x_3,\ x_4$ переносим в правые части уравнений. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4, \\ \quad -5x_2 = 17 - 5x_3 + 7x_4, \end{cases}$$

откуда

$$x_2 = \frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4 \text{ и}$$

$$x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2\left(-\frac{17}{5} + x_3 - \frac{7}{5}x_4\right) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_4.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы $\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2\right)$.

Частное решение получим, например, при $c_1 = 1,\ c_2 = 0$: $\left(\frac{4}{5};\ -\frac{12}{5};\ 1;\ 0\right)$.

2.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Система m линейных уравнений с n переменными называется системой линейных *однородных* уравнений, если все их свободные члены равны нулю. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевое (или тривиальное) решение (0; 0; …; 0).

Если в системе (2.12) $m=n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет только нулевое решение, как это следует из теоремы и формул Крамера. Нулевые решения, следовательно, возможны лишь для таких систем линейных однородных уравнений, в которых число уравнений меньше числа переменных или при их равенстве, когда определитель системы равен нулю.

Иначе: *система линейных однородных уравнений имеет нулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных, т.е. при* $r(A)<n$.

Обозначим решение системы (2.12) $x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ \ldots,\ x_n = k_n$ в виде строки $e_1 = \ k_1, k_2, ..., k_n\ $.

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами:

1. *Если строка* $e_1 = \ k_1, k_2, ..., k_n\ $ - решение системы (2.12), то строка $\lambda e_1 = \ \lambda k_1, \lambda k_2, ..., \lambda k_n\ $ *- также решение этой системы.*

2. *Если строки* $e_1 = \ k_1, k_2, ..., k_n\ $ и $e_2 = \ l_1, l_2, ..., l_n\ $ *- решения системы* (2.12), *то при любых* c_1 *и* c_2 *их линейная комбинация* $c_1e_1 + c_2e_2 = \ c_1k_1 + c_2l_1,\ c_1k_2 + c_2l_2 + ..., c_1k_n + c_2l_n\ $ *- также решение данной системы.*

Убедиться в справедливости указанных свойств решений системы линейных однородных уравнений можно непосредственной подстановкой их в уравнения системы.

Из сформулированных свойств следует, что *всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.* Поэтому представляет интерес найти такие линейно независимые решения системы (2.12), через которые линейно выражались бы все остальные решения.

Определение. *Система линейно независимых решений* $e_1, e_2, ..., e_k$ *называется* ***фундаментальной****, если каждое решение системы* (2.12) *является линейной комбинацией решений* $e_1,\ e_2,\ ..., e_k$.

Теорема. *Если ранг r матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений* (2.12) *меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы* (2.12) *состоит из n-r решений.*

Поэтому *общее решение* системы (2.12) линейных однородных уравнений имеет вид:

$$c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_ke_k, \tag{2.13}$$

где $e_1, e_2, ..., e_k$ - любая фундаментальная система решений, $c_1, c_2, ..., c_k$ - произвольные числа и $k=n-r$.

Можно показать, что *общее решение системы m линейных уравнений с n переменными* (2.1) *равно сумме общего решения соответствующей ей системы однородных линейных уравнений* (2.12) *и произвольного частного решения этой системы* (2.12).

3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1. Два различных по качеству вида растительного масла продаются в трех магазинах. Матрица A – объемы продаж этих продуктов в магазине в первом квартале, матрица B – во втором квартале (тыс. руб.).

Определить:

- объем продаж за два квартала;
- прирост продаж во втором квартале по сравнению с первым.

1) $A=\begin{pmatrix}2&5\\7&3\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\6&4\\2&5\end{pmatrix}$.

2) $A=\begin{pmatrix}3&4\\6&4\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\5&3\\3&3\end{pmatrix}$.

3) $A=\begin{pmatrix}2&2\\3&4\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\4&2\end{pmatrix}$.

4) $A=\begin{pmatrix}4&3\\3&2\\1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&3\\4&1\\2&3\end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\3&2\\4&3\end{pmatrix}$.

6) $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&1\\7&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&4\\2&2\\7&4\end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix}2&2\\3&4\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\\2&4\end{pmatrix}$.

8) $A=\begin{pmatrix}2&4\\3&1\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\\2&4\end{pmatrix}$.

9) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\2&1\\2&2\end{pmatrix}$.

10) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\4&4\\3&3\end{pmatrix}$.

11) $A=\begin{pmatrix}2&5\\6&3\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\5&2\\4&2\end{pmatrix}$.

12) $A=\begin{pmatrix}4&3\\4&1\\5&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&4\\2&2\\3&4\end{pmatrix}$.

13) $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2\\2&5\\4&6\end{pmatrix}$.

14) $A=\begin{pmatrix}3&4\\3&5\\6&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\7&3\\3&4\end{pmatrix}$.

15) $A=\begin{pmatrix}2&4\\1&5\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&5\\2&1\\4&2\end{pmatrix}$.

16) $A=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\\4&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\\5&4\end{pmatrix}$.

17) $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&5\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\4&4\\2&6\end{pmatrix}$.

18) $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4\\2&5\\3&3\end{pmatrix}$.

19) $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\\ 6 & 4\end{pmatrix}.$

20) $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$

21) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$

22) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}.$

23) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 4 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$

24) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 6\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$

25) $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$

26) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$

27) $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$

28) $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 6\\ 4 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 7\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$

29) $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$

30) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}.$

2. Предприятие производит три типа продукции, используя два вида ресурсов. Норма затрат ресурсов *i*-го вида на производство единицы продукции *j*-го типа задана матрицей затрат *A*, выпуск продукции за квартал – матрицей *X*. Стоимость единицы каждого вида ресурсов задан матрицей *P*.

Найти:

- матрицу *S* полных затрат ресурсов каждого вида;
- полную стоимость всех затраченных ресурсов.

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 10\end{pmatrix},\quad P=\;5;\;2\;.$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}10\\ 10\\ 10\end{pmatrix},\quad P=\;2;\;4\;.$

3) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 10\end{pmatrix},\quad P=\;1;\;3\;.$

4) $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix}$, $P=\ 1;\ 4\ .$

5) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\30\\20\end{pmatrix}$, $P=\ 4;\ 2\ .$

6) $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&4&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\10\\30\end{pmatrix}$, $P=\ 2;\ 5\ .$

7) $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\10\\30\end{pmatrix}$, $P=\ 3;\ 2\ .$

8) $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\30\\10\end{pmatrix}$, $P=\ 4;\ 4\ .$

9) $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\4&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\20\\20\end{pmatrix}$, $P=\ 3;\ 5\ .$

10) $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}30\\10\\20\end{pmatrix}$, $P=\ 2;\ 3\ .$

11) $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}40\\10\\20\end{pmatrix}$, $P=\ 3;\ 3\ .$

12) $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\4&1&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}30\\20\\20\end{pmatrix}$, $P=\ 6;\ 4\ .$

13) $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}$, $P=\ 1;\ 4$

14) $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\1&3&4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\20\\10\end{pmatrix}$, $P=\ 2;3$

15) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 40\end{pmatrix}$, $P=2;\ 2$

16) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\ 30\\ 10\end{pmatrix}$, $P=3;\ 3$

17) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}30\\ 30\\ 10\end{pmatrix}$, $P=2;\ 5$

18) $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}40\\ 40\\ 10\end{pmatrix}$, $P=7;\ 3$

19) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 10\end{pmatrix}$, $P=7;\ 6$

20) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}50\\ 40\\ 30\end{pmatrix}$, $P=1;\ 1$

21) $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\ 10\\ 10\end{pmatrix}$, $P=2;\ 3$

22) $A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix}$, $P=4;\ 1$

23) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\ 20\\ 30\end{pmatrix}$, $P=2;\ 2$

24) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix}$, $P=1;\ 4$

25) $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\ 10\\ 20\end{pmatrix}$, $P=3;\ 5$

26) $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 30\end{pmatrix}$, $P=$ 4; 4

27) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}20\\ 10\\ 10\end{pmatrix}$, $P=$ 3; 2

28) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix}$, $P=$ 1; 1

29) $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}30\\ 10\\ 20\end{pmatrix}$, $P=$ 2; 3

30) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix}$, $P=$ 2; 4

3. Найти определитель матрицы $B=A\cdot A^T$, если:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 7 & 0 & -2\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

2) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

3) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

4) $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 7 & -1 & 4\\ 9 & -8 & -6\end{pmatrix}$.

5) $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ -7 & -1 & 8\\ 2 & 6 & 9\end{pmatrix}$.

6) $A=\begin{pmatrix}-1 & 9 & 5\\ -4 & 6 & 2\\ 3 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

7) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

8) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

9) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

10) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 8 & 3 & -6\\ -4 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

11) $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -2\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

12) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

13) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

14) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

15) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

16) $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

17) $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

18) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

19) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

20) $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

21) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

22) $A=\begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

23) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

24) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

25) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

26) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

27) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

28) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

29) $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

30) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & 9 \\ -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Решить систему уравнений третьего порядка $AX = B$ матричным методом.

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 7\end{pmatrix}.$

3) $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -7\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -8\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}8\\ 5\\ 7\end{pmatrix}.$

4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}9\\ 12\\ 15\end{pmatrix}.$

5) $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 3 & 4 & -2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}11\\ 17\\ 25\end{pmatrix}.$

6) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 3\\ 5 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}2\\ 22\\ 32\end{pmatrix}.$

7) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -1 & 6\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}12\\ 15\\ 26\end{pmatrix}.$

8) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -4 & 5\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}7\\ 15\\ 25\end{pmatrix}.$

9) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}16\\ 9\\ 8\end{pmatrix}.$

10) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}21\\ 13\\ 4\end{pmatrix}.$

11) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 6 & 3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}-3\\ 15\\ 24\end{pmatrix}.$

12) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}8\\ 6\\ 9\end{pmatrix}.$

13) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 11 \\ 18 \\ -1 \end{pmatrix}.$

14) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}.$

15) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 14 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}.$

16) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$

17) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 34 \end{pmatrix}.$

18) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 13 \\ 59 \\ 74 \end{pmatrix}.$

19) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}.$

20) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 8 \end{pmatrix}.$

21) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$

22) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$

23) $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & -6 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ -11 \end{pmatrix}.$

24) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

25) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 39 \\ 18 \\ 23 \end{pmatrix}.$

26) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 11 \\ 31 \\ 14 \end{pmatrix}.$

27) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

28) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix}.$

29) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 56 \end{pmatrix}.$

30) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 17 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}.$

5. Решить систему уравнений 4-го порядка $CX=D$ методом Крамера и методом Гаусса.

1) $C=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$

2) $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$

3) $C=\begin{pmatrix}4 & 3 & -7 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -2\\ 4 & 3 & -8 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 5\\ 0\end{pmatrix}.$

4) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -5\\ 2 & 3 & 1 & -4\\ 3 & 1 & 2 & -6\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

5) $C=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4 & -4\\ 3 & 4 & -2 & -5\\ 4 & 2 & 3 & -9\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 3\\ 2\end{pmatrix}.$

6) $C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 3 & -6\\ 5 & 3 & -1 & -10\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}4\\ 8\\ 4\\ 3\end{pmatrix}.$

7) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -5\\ 2 & -3 & 4 & -5\\ 3 & -1 & 6 & -10\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 1\\ -4\end{pmatrix}.$

8) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -3\\ 2 & 3 & 4 & -10\\ 3 & 4 & 5 & -10\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}9\\ 0\\ 12\\ -1\end{pmatrix}.$

9) $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3 & -4\\ 1 & 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -3 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2\\ 9\\ 4\\ 2\end{pmatrix}.$

10) $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & -7\\ 1 & 0 & 3 & -5\\ 0 & 5 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -2 & -2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 11\\ -4\end{pmatrix}.$

11) $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 2 & -5\\ 3 & 6 & 3 & -10\\ 1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\ 6\\ 3\\ 0\end{pmatrix}.$

12) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 5 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ 11\\ 3\end{pmatrix}.$

13) $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5 & -5\\ 1 & 3 & 6 & -9\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\\ 0\end{pmatrix}.$

14) $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -3\\ -2 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 5 & -6\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

15) $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 2 & -8\\ 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ -3\\ 4\end{pmatrix}.$

16) $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1\\ 10\\ 0\\ 11\end{pmatrix}.$

17) $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & -5 & 3 & 1\\ 2 & 7 & -1 & -6\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}17\\ 10\\ 22\\ 0\end{pmatrix}.$

18) $C=\begin{pmatrix}2 & -4 & 9 & -6\\ 7 & 3 & -6 & -15\\ 7 & 9 & -9 & -20\\ 1 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0\\ 11\\ 14\\ 1\end{pmatrix}.$

19) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

20) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

21) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$

22) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}.$

23) $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 8 & -6 & 3 & -1 \\ -5 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$

24) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$

25) $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 30 \\ 3 \end{pmatrix}.$

26) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 12 \\ 35 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$27)\ C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2\\ 2 & 7 & -8 & 1\\ -1 & -3 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}30\\ 5\\ 0\\ 5\end{pmatrix}.$$

$$28)\ C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -2\\ 3 & -2 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & -1 & -3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}15\\ 15\\ 10\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$29)\ C=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -4\\ 2 & 3 & -4 & 1\\ 7 & -1 & -3 & -2\\ 1 & -2 & -1 & -2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}4\\ 13\\ 50\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$30)\ C=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1 & -4\\ 1 & -3 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -1 & -3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}9\\ 10\\ -1\\ 10\end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономических специальностей: учебник и практикум/Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, Н.Н. Фридман; по редакцией Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт: Высшее образование, 2010, 909 с.

2. Кудрявцев, В.А. Краткий курс математики/В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1985, 656 с.

Крюкова Татьяна Владимировна

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методическое пособие для студентов направления
«Экономика» всех форм обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 26.12.12. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 2,94. Тираж 75 экз. Зак. 12 1132. Рег. № 214.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.